Seminario de Mecánica Cuántica

Práctica II (Curso 2018)

I. **Traza Parcial, entrelazamiento**

1) Hallar el estado reducido del subsistema de los primeros m qubits y evaluar la entropía de entrelazamiento de la correspondiente partición $(m, n-m)$, con $1 \leq m \leq n-1$, para los estados siguientes:

$$|\Psi\rangle = (|0\ldots 0\rangle + |1\ldots 1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$|\Phi\rangle = (|10\ldots 0\rangle + |010\ldots\rangle + \ldots |0\ldots 01\rangle)/\sqrt{n}$$

$$|\Theta\rangle = (|0\ldots 01\rangle + |0\ldots 10\rangle)/\sqrt{2}$$

2) Dado el estado $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} C_{ij}|ij\rangle$, con $\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$ y $|ij\rangle \equiv |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$,

a) Determine el estado reducido del sistema A.

b) Supongamos que se realiza una medida local en el sistema B, en la base $\{|j_B\rangle\}$. Determine el estado conjunto del sistema y el estado reducido del sistema A luego de la medición, si se obtiene el resultado j.

c) Determinar el estado promedio del sistema conjunto y del sistema A luego de la medición.

3) Mostrar que $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$, siendo $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$, pero que $\rho_{01} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \neq \rho_{+-} = \frac{1}{2}(|++\rangle\langle ++| + \frac{1}{2}|--\rangle\langle --|)$.
Hallar un observable que logre distinguir estos tres estados. ¿Es posible distinguirlos localmente?

II. **Compuertas Cuánticas**

1) Utilizando la notación $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_Y$, $Z = \sigma_z$, escribir las matrices que representan, en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$), los operadores

$$a)\ X \otimes I, \quad b)\ I \otimes X, \quad c)\ X \otimes X, \quad d)\ U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

Verificar que el operador U_X es el Control Not cuántico en la base std. Verficar también que todos los operadores anteriores son unitarios y determinar sus inversas.

2) Comprobar que $W = U_X(H \otimes I)$, con $H = (X+Z)/\sqrt{2}$ la compuerta de Hadamard, transforma la base computacional en la base de Bell, determinando su representación matricial. Concluir que una medición en la base de Bell (es decir, basada en proyectores ortogonales sobre estos estados) es equivalente a aplicar $W^\dagger = (H \otimes I)U_X$ seguido de una medición en la base computacional (y una nueva aplicación de W). Representar mediante un circuito la anterior equivalencia.

3) Mostrar que $U_X = (I \otimes H)U_Z(I \otimes H)$, con $U_Z = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes Z$. Interpretar y representar mediante un circuito.

4) Mostrar que $U_S = U_X\bar{U}_X U_X$, con $U_X = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ y $\bar{U}_X = I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|$, es el operador de "swap", que satisface

$$U_S|ab\rangle = |ba\rangle$$

para todo estado producto $|ab\rangle = |a\rangle|b\rangle$. Escribir la matriz que representa a U_S en la base computacional y dibujar el circuito correspondiente.